4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 101

REFLEXIONA Y RESUELVE

Resolución de sistemas 2 × 2 mediante determinantes

- **Resuelve, aplicando $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ e $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = \ \ 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + \ \ 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

Comprueba, en cada caso, la solución.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = \ \ 2 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286$$

Por tanto: $x = \dfrac{156}{26} = 6; \quad y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + \ \ 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166$$

Por tanto: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5; \quad y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

■ **¿Cómo crees que sería la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas según la regla anterior?**

Pon las fórmulas correspondientes y aplícalas a la resolución de estos sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right.$

Si tenemos un sistema 3×3:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\} \text{ y llamamos: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix};\ A_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix};$$

entonces: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|},\ y = \dfrac{|A_y|}{|A|},\ z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$

(siempre que $|A| \neq 0$).

Si aplicamos las fórmulas a la resolución de los sistemas propuestos, tenemos que:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right\} |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -50;\ |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 10;\ |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 20 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30$$

Por tanto: $x = \dfrac{-50}{-10} = 5;\quad y = \dfrac{10}{-10} = -1;\quad z = \dfrac{-30}{-10} = 3$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8;\ |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;\ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Por tanto: $x = \dfrac{8}{2} = 4;\quad y = \dfrac{2}{2} = 1;\quad z = \dfrac{-4}{2} = -2$

Inversa de una matriz 2 × 2

- $\boldsymbol{x = \dfrac{a_{22}}{|A|}, \quad y = \dfrac{-a_{21}}{|A|}}$

  Obtén, de forma similar, las expresiones de z y de t. Llegarás, así, a la siguiente conclusión:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z + a_{12}t = 0 \\ a_{21}z + a_{22}t = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a_{12}}{|A|}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

Por tanto: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

- **Comprueba, efectuando el producto, que:**

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- **Aplica la expresión anterior para calcular M^{-1}, siendo: $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$**

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- **Haz los productos $M \cdot M^{-1}$ y $M^{-1} \cdot M$ y comprueba que, en ambos casos, obtienes la matriz unidad.**

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **¿Por qué crees que es necesario que el determinante de A sea distinto de cero para que una matriz cuadrada tenga inversa?**

  En su obtención, dividimos por $|A|$.

  Es necesario que $|A| \neq 0$ para que el sistema que obtenemos tenga solución única.

Página 103

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right.$$

$$\text{a) }\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2 \\ \\ |A'| = 0 \qquad\qquad\quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 2 \end{array}\right\}$$

El sistema es *compatible*.

$$\text{b) }\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A'| = 147 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$$

El sistema es *incompatible*.

$$\text{c) }\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. **Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

a) $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues la 1.ª y la 3.ª columna son iguales) } \rightarrow ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

Observación: Como la 4.ª columna de A' y la 1.ª son iguales, necesariamente $ran\,(A') = ran\,(A)$; es decir, el sistema es compatible.

b) $\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran\,(A) = 2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran\,(A) = 2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$$

El sistema es *compatible*.

Página 104

1. Enuncia la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3} \end{aligned}\right.$$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 3 = ran\,(A')$

Por tanto, el sistema es *compatible.*

Su solución es: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$,

siendo A_x la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes. Análogamente, A_y y A_z se obtienen sustituyendo en A la columna de los coeficientes de la incógnita correspondiente por la de los términos independientes.

2. Utilizando la regla de Cramer, resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{x - 3y + 5z} &\boldsymbol{= -24} \\ \boldsymbol{2x - y + 4z} &\boldsymbol{= -8} \\ \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 9} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= -24 \\ 2x - y + 4z &= -8 \\ x + y &= 9 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

Página 105

3. Demuestra la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Procede de forma análoga a como se ha hecho en esta página.

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{aligned}\right\}, \quad \text{con} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hemos de despejar cada una de las incógnitas. Empecemos por la x.

Para despejar x, hemos de eliminar y, z. Esto se consigue multiplicando las tres ecuaciones, que llamamos (1), (2), (3), por los adjuntos de los coeficientes de la x:

$$(1) \cdot A_{11} \rightarrow a_{11} A_{11}\, x + a_{12} A_{11}\, y + a_{13} A_{11}\, z = c_1 A_{11}$$

$$(2) \cdot A_{21} \rightarrow a_{21} A_{21}\, x + a_{22} A_{21}\, y + a_{23} A_{21}\, z = c_2 A_{21}$$

$$(3) \cdot A_{31} \rightarrow a_{31} A_{31}\, x + a_{32} A_{31}\, y + a_{33} A_{31}\, z = c_3 A_{31}$$

Sumando, obtenemos una igualdad que vamos a analizar por partes:

- El coeficiente de la x es:

  $$a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$$

- El coeficiente de la y es:

  $$a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} = 0$$

  Análogamente, se ve que el coeficiente de z es cero.

- El término independiente es:

  $c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}$, que es el determinante de la matriz A_x que resulta al sustituir en A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes:

  $$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Recapitulamos: al efectuar la suma $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenemos:

$$|A|x + 0y + 0z = |A_x|$$

Puesto que $|A| \neq 0$, podemos despejar la x, y obtenemos:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Para despejar la y habría que multiplicar las ecuaciones (1), (2), (3) por A_{12}, A_{22}, A_{32}, respectivamente. Y análogamente procederíamos para despejar z, obteniéndose:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Página 107

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\text{ y }\; |A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\text{ (la 1.ª y la 3.ª columna son iguales) } \rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solución: $x = 1 + \lambda,\; y = 7\lambda,\; z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabemos, por el apartado a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \ ran\,(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \rightarrow \ ran\,(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 108

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\left\{\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Por tanto, $ran\,(A) = 3 =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x - \ \ y - \ \ z = 0 \\ x + \ \ y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\}$ *Solución:* $x = -\lambda, \ y = -2\lambda, \ z = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + \ 4y + \ \ z = 0 \\ x + \ \ \ y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow$ *ran* $(A) = 3 =$ *n.° de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y + 5z \qquad = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + \ z - \ t = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 3$

Para resolverlo, pasamos la t al 2.° miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad = 2t \\ x - y + \ z = t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solución: $x = \lambda, \ y = -\lambda, \ z = 0, \ t = 2\lambda$

2. Resuelve:

a) $$\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y &= 0 \end{aligned}\right.$$

b) $$\left\{\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ y - t &= 0 \\ x + y + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + t &= 0 \end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ -x + 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\,(A) = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de las dos últimas ecuaciones y pasar la z al 2.° miembro:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -3z \\ y &= -z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ &y = -z \end{aligned}\right\}$$

Solución: $x = -5\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ y - t &= 0 \\ x + y + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + t &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3 < n.° \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación y pasar la t al 2.° miembro:

$$\left.\begin{aligned} x - 3z &= 0 \\ y &= t \\ x + y &= -2t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &z = \frac{-x}{3} = \frac{3t}{3} = t \\ &y = t \\ &x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{aligned}$$

Solución: $x = -3\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$, $t = \lambda$

Página 110

1. Discute y resuelve:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{rl} x + y + az &= 0 \\ ax - y &= -1 \\ x + 4y + 6z &= 0 \end{array}\right.$$

$$\text{b)}\ \left\{\begin{array}{rl} x + y &= k \\ kx - y &= 13 \\ 5x + 3y &= 16 \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{rl} x + y + az &= 0 \\ ax - y &= -1 \\ x + 4y + 6z &= 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \ \to\ a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \to\ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \to\ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = -3/4$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \ \to\ ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \to\ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° incógnitas* = 3, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \ y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \ z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y &= k \\ kx - y &= 13 \\ 5x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ k & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} k \\ 13 \\ 16 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \ \to \ k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $k = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{matrix} \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n.° \ de\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 13 \end{aligned}\right\} \ \text{Sumando:} \ 3x = 15 \ \to \ x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

- **Si $k = 5/3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 5/3 \\ 13 \\ 16 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n.° \ de\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y &= 13 \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \frac{11}{2}$, $y = \frac{-23}{6}$

- **Si** $\boldsymbol{k \neq 2}$ **y** $\boldsymbol{k \neq 5/3}$ → $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema es *incompatible*.

2. **Discute y resuelve, en función del parámetro** $\boldsymbol{a}$**, el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x + y &= 0 \\ (a-1)x + (a+1)y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \;<\; \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1 \end{matrix}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = 0}$, queda:

$$\left.\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda$, $y = \lambda$

- **Si** $\boldsymbol{a = 1}$, queda:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda$, $y = 0$

- **Si** $\boldsymbol{a \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 1}$ → $ran\,(A) = 2$

El sistema tiene solo la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$

Página 112

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de estas matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -5 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ -5 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ -5 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 113

1. Expresa en forma matricial y resuelve (ten en cuenta el ejercicio 1 de la página anterior):

a) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado A^{-1}.

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 106$, $y = 64$, $z = 36$

b) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \rightarrow X = B^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1$, $y = -5$

2. **Expresa en forma matricial y resuelve:**

a) $\begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -5 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B =$

$$= \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, \; y = 0, \; z = 2, \; t = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 2 de la página anterior hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \rightarrow X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 8, \; y = -3, \; z = 2, \; t = 2$

Página 119

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Estudio y resolución de sistemas. Regla de Cramer

1 **Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right. \qquad \text{c)}\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right.$$

$$\text{d)}\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{array}\right. \qquad \text{e)}\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right. \qquad \text{f)}\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{matrix} \end{array}\right). \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \text{ y } |A'| = 0,$$

tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 2

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \ \rightarrow \ x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} x \\ y \end{array}}\right\} \textit{Solución: } (1, -5)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow$ *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=3\\ -x-5y+z=0\\ 3x+y-z=6\end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2&3&-1\\-1&-5&1\\3&1&-1\end{array}}_{A}\;\middle|\;\begin{array}{c}3\\0\\6\end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3\\ -1 & -5\end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3\\ -1 & -5 & 0\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix} = 0$. Luego *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-z=3\\ -x-5y+z=0\end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x-z=3-3y\\ -x+z=5y\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\text{Sumando: } x=3+2y\\ z=5y+x=5y+3+2y=3+7y\end{array}$$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 3 + 7\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{l} x-y-2z=2\\ 2x+y+3z=1\\ 3x+z=5\end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1&-1&-2\\2&1&3\\3&0&1\end{array}}_{A}\;\middle|\;\begin{array}{c}2\\1\\5\end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix} = 6 \neq 0 \;\rightarrow$ *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

e) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x-2y-7z=0\\ y+z=-1\\ 2x+3y=0\end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\\2&3&0\end{array}}_{A}\;\middle|\;\begin{array}{c}2\\0\\-1\\0\end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que:

ran $(A) =$ *ran* $(A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3,\ \ y = -2,\ \ z = 1$

f) $$\left.\begin{array}{r} x + 3y + \ z = -1 \\ x - \ y - \ z = -1 \\ 2x + \ y + 3z = \ 5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{2 \quad 1 \quad 3}}_{A}$$

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3

El sistema es *compatible determinado.*

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0,\ \ y = -1,\ \ z = 2$

2 **Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:**

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} 8x + 14y = \ \ 2 \\ 3x - \ \ 5y = 11 \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\textbf{c)}\ \begin{cases} 3x - y \qquad\ \ = \ \ 2 \\ 2x + \ y + \ \ z = \ \ 0 \\ \qquad 3y + 2z = -1 \end{cases} \qquad \textbf{d)}\ \begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z = -2 \\ x - 2y - 3z = \ \ 1 \\ -x - \ \ y + \ \ z = -3 \end{cases}$$

$$\textbf{e)}\ \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ \qquad\qquad z - t = 0 \end{cases} \qquad \textbf{f)}\ \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} 8x + 14y = \ \ 2 \\ 3x - \ \ 5y = 11 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix} 8 & 14 \\ 3 & -5 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \end{array}\right) \ \rightarrow \ |A| = -82 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2, \ y = -1$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right) \ \rightarrow \ |A| = -4 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1, \ z = 1$

c) $$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc}3&-1&0\\2&1&1\\0&3&2\end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c}2\\0\\-1\end{array}\right.\right) \rightarrow \ |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\-1&3&2\end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix}3&2&0\\2&0&1\\0&-1&2\end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&1&0\\0&3&-1\end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc}2&1&1\\1&-2&-3\\-1&-1&1\end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c}-2\\1\\-3\end{array}\right.\right) \rightarrow \ |A| = -11 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&-3\\-3&-1&1\end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix}2&-2&1\\1&1&-3\\-1&-3&1\end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&-2&1\\-1&-1&-3\end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$

e) $$\left.\begin{array}{l} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&-1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c}1\\2\\0\end{array}\right.\right)$$

Tenemos que $\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1-t&1&-1\\2+t&-1&0\\t&0&1\end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $\left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$

f) $\left.\begin{array}{l} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-y=4+z-t \\ x+y=2-z+t \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1-z+t$$

Soluciones: $x = 3$, $y = -1-\lambda+\mu$, $z = \lambda$, $t = \mu$

3 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{array}\right.$$

$$\textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{array}\right. \qquad \textbf{d)}\left\{\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \\ 2x+y+z=11 \end{array}\right.$$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego, $ran\ (A') = 3 \neq ran\ (A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}\right)$$

Como $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que:

$ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -1 - y \\ z = 1 - y \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-1 - \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 11 \end{matrix}\right)$$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Luego $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

4 **Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + \ \ y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, *ran* (A) = *ran* (A') → *Sistema compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, *ran* $(A) \neq$ *ran* (A') → *Sistema incompatible.*

5 **Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:**

a) $$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, *ran* $(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: *ran* $(A) = 3 =$ *n.° de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

Discusión de sistemas mediante determinantes

s6 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 4 \\ m \\ 2 \end{matrix}\right)$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \;<\; \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}$$

- **Si $m = 1$,** queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- **Si $m = -1$,** queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3

  Sistema *compatible determinado.*

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} m - 1 \\ m \\ 1 \end{matrix}\right)$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\to\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \;<\; \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \quad \rightarrow \quad \text{El sistema es } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right). \quad \text{Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales.}$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A') = ran\ (A) = 2 < n.° \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$** → $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$

  Sistema *compatible determinado.*

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 1$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right). \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \text{ entonces:}$$

$ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$**, queda: $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$

  Sistema *compatible determinado.*

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$$

- **Si $m = 3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \quad \rightarrow \quad \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \end{array}\right). \quad \text{La } 1.^a \text{ y la } 3.^a \text{ fila son iguales.}$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3.

Sistema *compatible determinado*.

e) $\left.\begin{array}{rl} x \phantom{{}+y} + 2z &= 3 \\ 3x + y + z &= -1 \\ 2y - z &= -2 \\ x - y + mz &= -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & m \end{matrix}}_{A} & -5 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) =$$

$$= 18(-m - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ *ran* $(A) = 3$

- **Si $m = -2$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*.

- **Si $m \neq -2$** → *ran* (A') = 4 ≠ *ran* (A) = 3. Sistema *incompatible*.

f) $$\left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ m \\ 0 \\ m \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A'| = 3m + 3 = 0 \;\to\; m = -1$

Eliminando de A la 3.ª fila, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

- **Si $m = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Entonces: *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3.

Sistema *compatible determinado.*

- **Si $m \neq -1$**, queda:

3 = *ran* $(A) <$ *ran* $(A') = 4$. Sistema *incompatible.*

s7 **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (A) = *ran* (A').

$|A| = -5a - 25 = 0 \;\to\; a = -5$

- **Si $a = -5$** → Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ → *ran* (A) = *ran* $(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -5$** → Solo tiene la solución trivial (0, 0, 0).

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax \phantom{{}+y} + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \ \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** → Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

c) $\left.\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -2a - 5 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{-5}{2}$$

- **Si $a = -\frac{5}{2}$** → Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -\frac{5}{2}$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = 3a - 46 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{46}{3}$$

- **Si $a = \frac{46}{3}$** → Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \rightarrow\ ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq \frac{46}{3}$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

s8 **¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:**

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2\\ 2x + ay - 5z &= -4\\ x + y + 2z &= 2\end{aligned}\right.$$

$$\textbf{b)}\ \left\{\begin{aligned} x + y + z &= a - 1\\ 2x + y + az &= a\\ x + ay + z &= 1\end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2\\ 2x + ay - 5z &= -4\\ x + y + 2z &= 2\end{aligned}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2\\ 2 & a & -5 & -4\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \ \rightarrow\ a = -3$$

- **Si $a = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2\\ 2 & -3 & -5 & -4\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 20$, entonces:

ran $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ → El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = -3$** → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$ → *Compatible determinado.*

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a - 1\\ 2x + y + az &= a\\ x + ay + z &= 1\end{aligned}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1\\ 2 & 1 & a & a\\ 1 & a & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{array}{l} a = 1\\ a = 2\end{array}$$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Contradictorias. El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix}1\\ 2\\ 1\end{matrix}\right).$$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales, y $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$** → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → *Compatible determinado.*

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

Página 120

Matriz inversa

9 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $M = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix}3 & 0\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

a) $|M| = 2 \neq 0$ → la matriz M tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(M) \longrightarrow (Adj\,(M))^t \longrightarrow \frac{1}{|M|}(Adj\,(M))^t$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -2 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-4 & -5\\ 2 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 2\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -5 & 2\end{pmatrix} = M^{-1}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5/2 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

b) $|N| = 6 \neq 0$ → la matriz N tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(N) \longrightarrow (Adj\,(N))^t \longrightarrow \frac{1}{|N|}(Adj\,(N))^t$$

$$\begin{pmatrix}2 & -5\\ 0 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix} = N^{-1}$$

$N^{-1} = \begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 5/6 & 1/2\end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

s10 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

11 Utiliza las matrices $\boldsymbol{A^{-1}}$ y $\boldsymbol{B^{-1}}$ que has calculado en el ejercicio anterior para resolver estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{AX = B}$

b) $\boldsymbol{XB = A}$

a) $AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

b) $XB = A \;\rightarrow\; XBB^{-1} = AB^{-1} \;\rightarrow\; X = AB^{-1}$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

s12 **Consideramos la matriz siguiente:** $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\quad} Adj\,(A) \xrightarrow{\quad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\quad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Forma matricial de un sistema

13 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$

$|A| = 2 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\quad} Adj\,(A) \xrightarrow{\quad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\quad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right\} \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

c) $$\left.\begin{array}{r} x + y \qquad = -1 \\ y + z = -2 \\ x \qquad + z = 3 \end{array}\right\} \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$

d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + \ \ z = 3 \\ 3y + \ \ z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B}$

$|A| = 3 \neq 0 \ \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \ \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$

14 Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = 4 \\ x - \ \ y - \ \ z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 4 - 2\lambda \\ x - \ \ y = \lambda \end{array}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - 2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 - \lambda}{-4} = \frac{4 + \lambda}{4}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - 2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4 + 3\lambda}{-4} = \frac{4 - 3\lambda}{4}$$

Solución: $x = \dfrac{4 + \lambda}{4}$, $y = \dfrac{4 - 3\lambda}{4}$, $z = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ Comprobamos si tiene solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 2$$

Como $ran\,(A) \neq ran\,(A')$, el sistema es *incompatible*.

PARA RESOLVER

s15 **Determina los valores de m para los cuales son incompatibles estos sistemas:**

a) $\begin{cases} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} mx - y - z = m \\ x - y + mz = m \\ x + y + z = -1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & m & m \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$, con A la matriz de las tres primeras columnas

$$|A| = -m^2 - 2m - 1 = -(m+1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1$$

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Contradictorias. El sistema es *incompatible.*

- **Si $m \neq -1$,** es compatible determinado, pues *ran* (A) = *ran* (A') = 3.
- Por tanto, solo es incompatible para $m = -1$.

b) $\left.\begin{array}{l} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m & 4 \\ 1 & m & 2 & 2 \end{array}\right)$, con A la matriz de las tres primeras columnas

$$|A| = -m^3 - m^2 + 6m = -m(m-2)(m+3) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si $m = 0$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, entonces:

ran (A) = *ran* (A') = 2 → *Compatible indeterminado.*

- **Si $m = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \;\to\; \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Como} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -45,$$

A

entonces: $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$ → Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 0$, $m \neq 2$ y $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible para $m = 2$ y para $m = -3$.

c)
$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m-4 \\ 0 & m-6 & 3 & 0 \\ m+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

A

$$|A| = m^2 - 2m - 15 = 0 \;\to\; m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si $m = 5$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Como} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

A

entonces $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$; el sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m = -3$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Como} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 72,$$

A

entonces $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

- **Si $m \neq 5$ y $m \neq -3$** → Sistema *compatible determinado*, pues $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

Por tanto, es incompatible solo para $m = -3$.

s16 **Discute y resuelve según los valores de *a*:**

a) $\begin{cases} ax + \ \ y = 2 - 2a \\ x + ay = a - 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (a + 1)\,x + 2y + z = a + 3 \\ ax + \ \ y \qquad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} ax + \ \ y &= 2 - 2a \\ x + ay &= a - 1 \end{aligned}\right\} \; A' = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 2 - 2a \\ 1 & a & a - 1 \end{array}\right)$, con $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = a^2 - 1 = 0 \;\begin{cases} a = \ \ 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- **Si *a* = 1**, queda:

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

  $x + y = 0 \;\;\rightarrow\;\; y = -x$. *Soluciones:* $x = \lambda, \;\; y = -\lambda$

- **Si *a* = –1**, queda:

  $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si *a* ≠ 1 y *a* ≠ –1** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *n.° de incógnitas* = 2.

  El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 2a & 1 \\ a - 1 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-2a^2 + a + 1}{a^2 - 1} = \frac{(-2a - 1)(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{-2a - 1}{a + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 - 2a \\ 1 & a - 1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1} = \frac{(a + 2)(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{a + 2}{a + 1}$$

Solución: $x = \dfrac{-2a - 1}{a + 1}$; $y = \dfrac{a + 2}{a + 1}$

b) $\left.\begin{aligned} (a + 1)x + 2y + z &= a + 3 \\ ax + \ \ y \qquad &= a \\ ax + 3y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\} \; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a + 1 & 2 & 1 & a + 3 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 3 & 1 & a + 2 \end{array}\right)$, con $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a + 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = a + 1 = 0 \;\;\rightarrow\;\; a = -1$$

- **Si *a* = –1**, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$. La 1.ª fila es la 3.ª menos la 2.ª.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \text{ luego, } ran\ (A) = ran\ (A') = 2.$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo podemos prescindir de la 3.ª ecuación y poner las otras dos variables en función de y:

$$\left.\begin{array}{r} 2y + z = \ \ 2 \\ -x + y \qquad = -1 \end{array}\right\} \ x = 1 + y; \ \ z = 2 - 2y$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \ \ y = \lambda, \ \ z = 2 - 2\lambda$

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -1}$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → *Compatible determinado.*

  Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} = 1; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a+3 & a+3 & 1 \\ a & a & 0 \\ a & a+2 & 1 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{0}{a+1} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 2 & a+3 \\ a & 1 & a \\ a & 3 & a+2 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{2a+2}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} = 2$$

Solución: $x = 1, \ \ y = 0, \ \ z = 2$

s17 **Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro $\boldsymbol{a}$, estos sistemas de ecuaciones:**

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\ \ - az = 1 \end{array}\right. \qquad\qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{r} x + \ y + \ \ z = 1 \\ ax \qquad\qquad = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \qquad\ \ - az = 1 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) \qquad |A| = 1 - a^2 = 0 \ \begin{cases} a = \ \ 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

(con A la matriz de las tres primeras columnas)

- **Si** $\boldsymbol{a = 1}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{A}$. Observamos que la 1.ª y la 3.ª columna son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0;$ luego $ran\ (A) = ran\ (A') = 2.$

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 1.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + 8y = 1 - 23z \\ x = 1 + z \end{array}\right\} \quad 8y = 1 - 23z - 1 - z = -24z \quad \to \quad y = -3z$$

Soluciones: $(1 + \lambda, -3\lambda, \lambda)$

- **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 7 & 20 \\ -1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Como } \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

ran $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\to$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{3 - 3a}{1 - a^2} = \frac{3(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{3}{1 + a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a - 1}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-1}{1 + a}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{1 + a}$, $y = \dfrac{3}{1 + a}$, $z = \dfrac{-1}{1 + a}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -a(2 - a) = 0 \; \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$ Sistema *incompatible* (la 2.ª ecuación es imposible).

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}1\\ 2\\ 0\end{matrix}\right).$$ La 1.ª y la 3.ª columna son iguales.

Además, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2 \neq 0$; luego $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1\\ 2x \qquad\quad\ = 2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x = 1\\ y = 1 - x - z = -z\end{array}\right\}\ \textit{Soluciones: } (1, -\lambda, \lambda)$$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = n.°\ de\ incógnitas = 3$.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & a & 2\end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{2}{a}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{2(2-a)}{-a(2-a)} = \frac{-2}{a};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & 2\\ 0 & a & 0\end{vmatrix}}{-a(2-a)} = \frac{-a(2-a)}{-a(2-a)} = 1$$

Solución: $x = \dfrac{2}{a},\ y = \dfrac{-2}{a},\ z = 1$

s18 Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{l} \lambda x \qquad\quad + 2z = 0\\ \qquad\ \lambda y - \ z = \lambda\\ x + 3y + \ z = 5\end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{l} (m + 2)x + (m - 1)y - z = 3\\ mx - \qquad\quad\ y + z = 2\\ x + \qquad\quad my - z = 1\end{array}\right.$$

$$\textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{l} \lambda x + 3y + \ z = \lambda\\ x + \lambda y + \lambda z = 1\\ x + \ y - \ z = 1\end{array}\right. \qquad \textbf{d)}\ \left\{\begin{array}{l} mx + \ y + \quad z = 2\\ 2x + my + m^2 z = 1\\ 2x + \ y + \quad z = 2\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} \lambda x \qquad\quad + 2z = 0\\ \lambda y - \ z = \lambda\\ x + 3y + \ z = 5\end{array}\right\}\ A' = \left(\underbrace{\begin{matrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 3 & 1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}0\\ \lambda\\ 5\end{matrix}\right)$$

$$|A| = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 0 \ \text{ y } \ \lambda = -1$$

- **Si $\lambda = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$ La 1.ª fila es la 2.ª multiplicada por –2.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0; \text{ luego } ran\,(A) = ran\,(A') = 2.$$

El sistema es *compatible indeterminado.*

Lo resolvemos prescindiendo de la 1.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\} \; z = 0; \; x = 5 - 3y$$

Soluciones: $x = 5 - 3\lambda, \; y = \lambda, \; z = 0$

- **Si $\lambda = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \text{ luego } 2 = ran\,(A) < ran\,(A') = 3.$$

El sistema es *incompatible.*

- **Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$:**

ran (A) = *ran* (A') = 3. El sistema es *compatible determinado.*

Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{-4\lambda}{\lambda(\lambda + 1)} = -\frac{4}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{\lambda(\lambda + 3)}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda^2}{\lambda(\lambda + 1)} = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$$

Soluciones: $x = -\dfrac{4}{\lambda + 1}, \; y = \dfrac{\lambda + 3}{\lambda + 1}, \; z = \dfrac{2\lambda}{\lambda + 1}$

b) $$\left.\begin{array}{r} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-\qquad y+z=2 \\ x+\qquad my-z=1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -m(m+1) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- **Si** $\boldsymbol{m = -1}$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \text{ luego } 2 = ran\ (A) < ran\ (A') = 3.$$

  El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m = 0}$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \text{ luego } 2 = ran\ (A) < ran\ (A') = 3.$$

  El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m \neq -1}$ **y** $\boldsymbol{m \neq 0}$: $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

  El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m-1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

  $$y = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & 3 & -1 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = \frac{1}{m}$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & 3 \\ m & -1 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

  Soluciones: $x = \dfrac{2m+1}{m(m+1)}$, $y = \dfrac{1}{m}$, $z = \dfrac{2m+1}{m(m+1)}$

c) $$\left.\begin{array}{r}\lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1\end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \quad \begin{array}{l}\lambda = -1 \\ \lambda = 2\end{array}$$

- **Si $\lambda = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right).$$ La 4.ª columna es igual a la 1.ª y la opuesta de la 3.ª,

y $\begin{vmatrix}-1 & 3 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$; luego $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos prescindiendo de la 1.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x - y = 1 + z \\ x + y = 1 + z\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 + z & -1 \\ 1 + z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{2 + 2z}{2} = 1 + z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 + z \\ 1 & 1 + z\end{vmatrix}}{2} = 0$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \ \ y = 0, \ \ z = \lambda$

- **Si $\lambda = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right).$$ La 1.ª fila es la suma de las otras dos.

$\begin{vmatrix}2 & 3 \\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1 \neq 0$; luego $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos prescindiendo de la 1.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}x + 2y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x + 2y = 1 - 2z \\ x + y = 1 + z\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 - 2z & 2 \\ 1 + z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{-1 - 4z}{-1} = 1 + 4z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 - 2z \\ 1 & 1 + z\end{vmatrix}}{-1} = \frac{3z}{-1} = -3z$$

Soluciones: $x = 1 + 4\lambda, \ \ y = -3\lambda, \ \ z = \lambda$

- **Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$**: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = \frac{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 2\lambda + 4} = 0$$

  Solución: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

d) $$\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & m^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$|A| = -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \ \rightarrow\ m = 0, \ m = 1, \ m = 2$

- **Si $m = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \text{ luego } 2 = ran\ (A) < ran\ (A') = 3.$$

  El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

  Ecuaciones contradictorias.

  El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right). \text{ La 1.ª y la 2.ª fila son iguales.}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$; luego el sistema es *compatible indeterminado*.

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 2 - z \\ 2x + 2y = 1 - 4z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ 1-4z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3+2z}{2} = \frac{3}{2} + z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-z \\ 2 & 1-4z \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-6z}{2} = -1 - 3z$$

Soluciones: $x = \frac{3}{2} + \lambda, \;\; y = -1 - 3\lambda, \;\; z = \lambda$

- **Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq 2$**: *ran* (A) = *ran* (A')

  El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^3 + 3m^2 - 2m} = 0;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-m^3 + 3m^2 - 2m} = \frac{-2m^3 + 4m^2 + m - 2}{-m^3 + 3m^2 - 2m} =$$

$$= \frac{-2(m-2)\,(m^2 - (1/2))}{-m(m-1)(m-2)} = \frac{2m^2 - 1}{m^2 - m};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-m(m-1)(m-2)} = \frac{2m^2 - 5m + 2}{-m(m-1)(m-2)} =$$

$$= \frac{(m-2)(2m-1)}{-m(m-1)(m-2)} = \frac{-2m+1}{m^2 - m}$$

Soluciones: $x = 0, \;\; y = \frac{2m^2 - 1}{m^2 - m}, \;\; z = \frac{-2m+1}{m^2 - m}$

Página 121

s19 **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:**

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right.$$

$$\textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right. \qquad \textbf{d)}\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Se trata de un sistema homogéneo, por tanto siempre es compatible.

$|A| = -2a^3 - 2a = 0 \;\to\; a = 0$

- **Si $a = 0$,** queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ La 1.ª ecuación es la opuesta de la 2.ª.

  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; luego $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$.

  El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos prescindiendo de la 2.ª ecuación:

  $\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ -x = 0 \end{array}\right\}$ Cualquier valor de z satisface la ecuación.

  Solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = \lambda$

- **Si $a \neq 0$:** $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado* y su única solución es la trivial.

  Solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \text{ luego } 2 = ran\,(A) < ran\,(A') = 3.$$

El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right). \text{ La 1.}^{\text{a}} \text{ y la 3.}^{\text{a}} \text{ fila son iguales.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \text{ luego } ran\,(A) = ran\,(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos prescindiendo de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x + y = -z \\ x - 2y = 1 + z \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 + z & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{z - 1}{-5} = \frac{1}{5} - \frac{z}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 1 + z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2 + 3z}{-5} = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}z$$

Soluciones: $x = \frac{1}{5} - \frac{\lambda}{5}$, $y = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\lambda$, $z = \lambda$

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$:** $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = 0; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{m - 2}{-(m - 2)(m - 1)} = \frac{-1}{m - 1};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{-m + 2}{-(m - 2)(m - 1)} = \frac{1}{m - 1}$$

Soluciones: $x = 0$, $y = \frac{-1}{m - 1}$, $z = \frac{1}{m - 1}$

c) $$\left.\begin{array}{l} kx + ky - \;\; z = 2 \\ 3x - ky \qquad\;\; = 0 \\ 5x + ky \qquad\;\; = 0 \\ \;x \qquad\quad + 2z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$|A'| = -40k = 0 \;\rightarrow\; k = 0$

- **Si $\boldsymbol{k \neq 0}$:** Como $ran\ (A) < 4$ y $ran\ (A') = 4$, el sistema es *incompatible.*

- **Si $\boldsymbol{k = 0}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$ La 2.ª y la 3.ª ecuación son equivalentes.

Podemos eliminar la 3.ª ecuación. La matriz ampliada se transforma en:

$$B' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}}_{B} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, $ran\ (B) < ran\ (B') = 3$.

Por tanto, en cualquier caso, el sistema es *incompatible.*

d) $$\left.\begin{array}{l} x + \;3y + \;\; z = 5 \\ mx \qquad\;\; + 2z = 0 \\ \qquad my - \;\; z = m \\ x - \;\;\; y + \;\; z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ m \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A'| = -m^2 + 7m = 0 \;\; \begin{array}{l} m = 0 \\ m = 7 \end{array}$$

- **Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ y $\boldsymbol{m \neq 7}$:**

  Como $ran\ (A) < 4$ y $ran\ (A') = 4$, el sistema es *incompatible.*

- **Si $\boldsymbol{m = 0}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La 2.ª y la 3.ª fila son equivalentes.

Podemos eliminar la 2.ª ecuación.

La matriz ampliada se transforma en:

$$B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\hphantom{1 \quad 3 \quad 1}}_{B}$$

Como $|B| = -4 \neq 0$, $ran\ (B) = ran\ (B') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = 0$$

Solución: $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = 0$

- **Si $m = 7$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0, \ ran\ (A') = ran\ (A) = 3.$$

El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos prescindiendo de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{56} = \frac{-28}{56} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{56} = \frac{70}{56} = \frac{5}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix}}{56} = \frac{98}{56} = \frac{7}{4}$$

Solución: $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = \frac{7}{4}$

20 **Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$ siendo:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}, \textbf{ y resuélvelo.}$$

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer término:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y = 5 \\ -x + z = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{B}$$

$|A| = 8$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

s21 **Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

☛ ***Multiplica dos veces por A^{-1}, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s22 **Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AXB = C \quad \to \quad A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1$ $\to$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

23 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

$$(AB^t + C)X = D \;\to\; (AB^t + C)^{-1}\,(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}D \;\to$$

$$\to \; X = (AB^t + C)^{-1}D$$

- Sea $E = AB^t + C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos E^{-1} $(|E| = 6 \neq 0 \ \to\ $ existe $E^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(E) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(E))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|E|}(Adj\,(E))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \to \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = E^{-1}$$

- Por tanto:

$$X = (AB^t + C)^{-1}D = E^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

24 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3AX = B \ \to\ X = \frac{1}{3}A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} $(|A| = -1 \neq 0 \ \to\ $ existe $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

25 Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} $(|A| = 16 \neq 0 \ \to\ $ existe $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

s26 **Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:**

$$\left\{\begin{array}{l} x \qquad\qquad - \qquad az = -1 \\ x + (a+3)y + \ (4-a)z = 0 \\ x + (a+3)y + (a^2+2)z = a+2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x \qquad\qquad - \qquad az = -1 \\ x + (a+3)y + \ (4-a)z = 0 \\ x + (a+3)y + (a^2+2)z = a+2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ a+2 \end{array}\right)$$

$$|A| = a^3 + 4a^2 + a - 6 = 0 \quad \begin{array}{l} a = -3 \\ a = -2 \\ a = 1 \end{array}$$

- **Si $a = -3$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 11 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, entonces *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$. La 2.ª y la 3.ª fila son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; luego *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación (puesto que es igual que la 1.ª):

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = -1 \\ x + y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2z = -1 \\ x + 6z = -y \end{array}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -y & 6 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-6 + 2y}{4}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -y \end{vmatrix}}{4} = \frac{-y + 1}{4}$$

Soluciones: $x = \dfrac{-3 + \lambda}{2}$, $y = \lambda$, $z = -\dfrac{-\lambda + 1}{4}$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, entonces *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq -3$, $a \neq -2$ y $a \neq 1$** → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3 =$ *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -a \\ 0 & a + 3 & 4 - a \\ a + 2 & a + 3 & a^2 + 2 \end{vmatrix}}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{a^2 + 5a + 6}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} =$$

$$= \frac{(a + 3)(a + 2)}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{1}{a - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ 1 & 0 & 4 - a \\ 1 & a + 2 & a^2 + 2 \end{vmatrix}}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{a^2 - 3a - 10}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} =$$

$$= \frac{(a + 2)(a - 5)}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{a - 5}{(a + 3)(a - 1)} = \frac{a - 5}{a^2 + 2a - 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a + 3 & 0 \\ 1 & a + 3 & a + 2 \end{vmatrix}}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{a^2 + 5a + 6}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} =$$

$$= \frac{(a + 3)(a + 2)}{(a + 3)(a + 2)(a - 1)} = \frac{1}{a - 1}$$

Soluciones: $x = \dfrac{1}{a - 1}$, $y = \dfrac{a - 5}{a^2 + 2a - 3}$, $z = \dfrac{1}{a - 1}$

s27 **Averigua los valores de α para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geométricamente los resultados obtenidos:**

a) $$\left\{\begin{array}{l} x + \ \ y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + \ \ y - 3z = 4 \end{array}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{array}{l} \alpha x - \ \ y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + \ \ y - 3z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \qquad |A| = \alpha - 9 = 0 \ \rightarrow \ \alpha = 9$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix}1 & 1 & 2\end{matrix}}}_{A}$$

- **Si $\alpha = 9$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right). \quad \text{Como} \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ \text{ entonces:}$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix}1 & 1 & -3\end{matrix}}}_{A}$$

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos.

Podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al 2.° miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 3 - 2z \\ x + 2y = 5 - 9z \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2z & 1 \\ 5 - 9z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 5z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2z \\ 1 & 5 - 9z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 7z$$

Soluciones: $x = 1 + 5\lambda, \ y = 2 - 7\lambda, \ z = \lambda$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en una recta.

- **Si $\alpha \neq 9$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \alpha \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{\alpha - 9}{\alpha - 9} = 1;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & \alpha \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{2\alpha - 18}{\alpha - 9} = \frac{2(\alpha - 9)}{\alpha - 9} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \frac{0}{\alpha - 9} = 0. \qquad \textit{Solución:} \ x = 1, \ y = 2, \ z = 0$$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 2, 0).

b) $\left.\begin{array}{l} \alpha x - \;\; y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right)$ with $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = -\alpha^2 + 1 = 0 \; < \; \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{array}$$

- **Si $\alpha = 1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x - y = 1 \;\; \rightarrow \;\; x = 1 + y$. *Soluciones:* $x = 1 + \lambda, \;\; y = \lambda$.

Geométricamente, son rectas coincidentes (se trata de la misma recta).

- **Si $\alpha = -1$,** queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones son contradictorias.

El sistema es *incompatible*. Geométricamente, son dos rectas paralelas.

- **Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *n.° incógnitas* $= 2$.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\alpha - 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-1}{1 + \alpha};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{1 + \alpha}, \;\; y = \dfrac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$

Geométricamente, son dos rectas que se cortan en un punto.

s28 Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de *a* que sea posible:

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a - 2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \;\; \rightarrow \;\; |A| = a^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \to |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2a} & \dfrac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to |A| = (a-2)a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

s29 **Halla, en función de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ y calcula, si existe, la matriz inversa A^{-1} en los casos $a = 1$ y $a = -1$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \to |A| = a^2 + 4a + 3 = 0 \to$$

$$\to a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & a & \boxed{-3} \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por tanto:

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$ o $\boldsymbol{a = -3}$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$ y $\boldsymbol{a \neq -3}$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = 3$

Así, si $a = -1$, como $|A| = 0$, no existe A^{-1}.

Para $a = 1$, $|A| = 8 \neq 0$, sí existe A^{-1}. La calculamos en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -12 & -4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

s30 **Halla los valores del parámetro $\boldsymbol{t}$ para los cuales las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son regulares y calcula:**

a) $\boldsymbol{A^{-1}}$ si $\boldsymbol{t = 1}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{t} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{B^{-1}}$ si $\boldsymbol{t = 2}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{t} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \;\;\rightarrow\;\; t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 122

s31 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:**

a) Encuentra los valores de λ para los que AB es regular.

b) Determina los valores de λ para los que BA es regular.

c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$A \cdot B$ es regular cuando $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = 0 \rightarrow B \cdot A$ no es regular.

c) $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < n.^\circ$ *de incógnitas*

El sistema es *compatible indeterminado,* para cualquier valor de a y b. Por tanto, no puede ser *compatible determinado.*

s32 **En el supuesto de que exista, calcula una matriz X tal que $AX = B$ en los siguientes casos:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 4 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. Luego:

$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -14 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para poder efectuar el producto $A \cdot X = B$, X debería ser (si existiera) de dimensión 2×3.

Sea $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a & y + b & z + c \\ 2x + a & 2y + b & 2z + c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3a = 5 \;\rightarrow\; a = \frac{5}{3}$$

$$x + a = 2 \;\rightarrow\; x = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2x + a = 1 \;\rightarrow\; 2x = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{3}$$

No tiene solución. Luego no existe X tal que $AX = B$.

s33 **Dado el sistema:**

$$S: \begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α y β.

b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \right.\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) Si $\alpha = \beta = 1$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \right.\right), \text{ con } |A| = -2.$$

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Solución: $x = \frac{-1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

CUESTIONES TEÓRICAS

s34 En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) < *n.° de incógnitas*.

b) No, pues al ser *ran* (*A*) < *n.° incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2.° miembro las incógnitas que sea necesario.

s35 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial (0, 0, 0).

s36 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

37 ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

s38 Dadas estas ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

a) Por ejemplo, $3x - 2y + z = 1$ contradice la 1.ª ecuación; luego si añadimos esta ecuación, el sistema obtenido sería incompatible.

b) Por ejemplo, si añadimos la ecuación $y = 0$, como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ el sistema sería compatible determinado.}$$

s39 **Representa matricialmente los sistemas:**

$$S: \begin{cases} 3x + \ \ y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 3x + \ \ y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Justifica la relación obtenida.

SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad (|A| = 1 \neq 0)$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

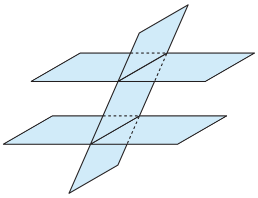
Las soluciones obtenidas son cada una de las columnas de la matriz inversa. Observamos que las matrices de los términos independientes de los dos sistemas son las columnas de la matriz identidad. Por tanto, las incógnitas que hallamos son los elementos de la matriz inversa.

s40 **Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos, y el de la matriz ampliada, tres, ¿qué interpretaciones geométricas podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.**

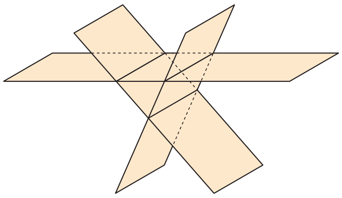
Si $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$, el sistema es incompatible.

Interpretaciones geométricas posibles:

1) Dos planos paralelos y otro que los corta:



2) Tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres:



:

Un ejemplo de cada uno de los dos casos sería:

$$1) \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y \quad\ &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad 2) \left.\begin{aligned} x + \ \ y + z &= 1 \\ x + \ \ y \quad\ &= 2 \\ 2x + 2y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

s41 **Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A, ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible determinado?**

No. Si uno de ellos es compatible determinado es porque $ran\ (A) = ran\ (A') = 4$. Por tanto, si A es la misma matriz en los dos sistemas, también en el otro será $ran\ (A) = 4$. Luego los dos serían compatibles determinados.

s42 **Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:**

$$(x \ \ y \ \ z)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$$

La ecuación matricial dada la podemos escribir así:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad \text{Si llamamos } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces: $AX = 0$

Por tanto, la matriz A que buscamos es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Página 123

PARA PROFUNDIZAR

43 **Estudia y resuelve cuando sea posible:**

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} + 2t &= 3 \\ 3x - y + z - t &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t &= a \\ 2x + y + z + t &= 2 \end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} ax + z + t &= 1 \\ ay + z - t &= 1 \\ ay + z - 2t &= 2 \\ az - t &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\text{a)}\left.\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} + 2t &= 3 \\ 3x - y + z - t &= 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t &= a \\ 2x + y + z + t &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & a \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \end{matrix}}_{A}$$

$$|A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 3$$

(La 4.ª columna depende linealmente de las tres primeras).

$$\begin{vmatrix}1&1&0&3\\3&-1&1&1\\2&1&1&2\\5&-3&2&a\end{vmatrix} = \overset{\text{FILAS}}{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})\\(3.^{a})-(2.^{a})\\(4.^{a})-2\cdot(2.^{a})\end{array}} \begin{vmatrix}1&1&\boxed{0}&3\\3&-1&\boxed{1}&1\\-1&2&\boxed{0}&1\\-1&-1&\boxed{0}&a-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&3\\-1&2&1\\-1&-1&a-2\end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{FILAS}}{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})+(1.^{a})\\(3.^{a})+(1.^{a})\end{array}} \begin{vmatrix}1&1&3\\0&3&4\\0&0&a+1\end{vmatrix} = 3(a+1) = 0 \quad\rightarrow\quad a = -1$$

- **Si $a = -1$** → *ran* (A) = *ran* (A') = $3 <$ *n.° de incógnitas.* El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación y pasar la t al 2.° miembro:

$$\left.\begin{array}{r}x+y\phantom{{}+z}=3-2t\\3x-y+z=1+t\\2x+y+z=2-t\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}3-2t&1&0\\1+t&-1&1\\2-t&1&1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3};\quad y = \frac{\begin{vmatrix}1&3-2t&0\\3&1+t&1\\1&2-t&1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1&1&3-2t\\3&-1&1+t\\2&1&2-t\end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3},\ y = \dfrac{4-4\lambda}{3},\ z = \dfrac{-8+5\lambda}{3},\ t = \lambda$

- **Si $a \neq -1$** → *ran* $(A) = 3 \neq$ *ran* $(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.

b) $$\left.\begin{array}{rl}ax+z+t&=1\\ay+z-t&=1\\ay+z-2t&=2\\az-t&=0\end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c}a&0&1&1&1\\0&a&1&-1&1\\0&a&1&-2&2\\0&0&a&-1&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}a&0&1&1\\0&a&1&-1\\0&a&1&-2\\0&0&a&-1\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a&1&-1\\a&1&-2\\0&a&-1\end{vmatrix} = \overset{\text{FILAS}}{\begin{array}{l}(1.^{a})\\(2.^{a})-(1.^{a})\\(3.^{a})\end{array}} a\begin{vmatrix}a&1&-1\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{-1}\\0&a&-1\end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix}a&1\\0&a\end{vmatrix} = a\cdot a^2 = a^3 = 0 \quad\rightarrow\quad a = 0$$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to z = 1 \\ \to z = 2 \\ \to t = 0 \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \textit{Incompatible}$$

- **Si $a \neq 0$** $\to$ *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 4.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a};$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Soluciones: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}$, $y = \dfrac{1}{a^2}$, $z = \dfrac{-1}{a}$, $t = -1$

44 **Discute los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + 3y - 2z &= -8 \\ 4x + y + az &= b \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 2 \\ -8 \\ b \end{matrix}\right.\right)$$

$|A| = 5a = 0 \to a = 0$

- **Si $a = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{matrix}}_{A} & \left|\begin{matrix}2\\ -8\\ b\end{matrix}\right.\end{matrix}\right); \quad \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -8\\ 4 & 1 & b\end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad b = -4$$

- **Si $a = 0$ y $b = -4$** → *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas.*

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 0$ y $b \neq -4$** → *ran* (A) = 2 ≠ *ran* (A') = 3.

  El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 0$** → *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= a - 1\\ 2x + y + az &= a\\ x + ay + z &= b\end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{matrix}}_{A} & \left|\begin{matrix}a - 1\\ a\\ b\end{matrix}\right.\end{matrix}\right)$$

$$|A| = -(a - 1)(a - 2) = 0 \quad \begin{array}{l} a = 1\\ a = 2\end{array}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & b\end{array}\right)$$ Contradictorias, a no ser que $b = 0$.

— Si $a = 1$ y $b \neq 0$ → *Sistema incompatible.*

— Si $a = 1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right).$$ La 1.ª fila y la 3.ª son iguales.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow$$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & b\end{array}\right)$$ La 1.ª columna y la 3.ª son iguales.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow$$ *ran* (A) = 2

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&b\end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \quad\rightarrow\quad b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1$ → $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

45 Discute, según los valores de los parámetros, los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ x \quad\quad + z = c \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \quad\; = b + 1 \\ -x \quad\quad + z = b \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ x \quad\quad + z = c \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$, con $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$|A| = 6 \neq 0 \quad\rightarrow\quad ran\ (A) = ran\ (A') =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

b) $\left.\begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \quad\; = b + 1 \\ -x \quad\quad + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & a & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$, con $\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ a = \;\;2 \end{array}$$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix} \neq 0 \quad\rightarrow\quad ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix}-1&1&b-1\\2&-1&b+1\\-1&0&b\end{vmatrix} = -3b = 0 \quad\rightarrow\quad b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

— Si $a = -1$ y $b = 0 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

46 Calcula los valores de a y b para los cuales cada uno de estos sistemas tiene infinitas soluciones. Resuélvelos para esos valores:

a) $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 1 \\ b \\ 1 \end{array}\right.\right)$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 1 \\ b \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

— Si $a = 1$ y $b = 1$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 1$.

El sistema es *compatible indeterminado*.

$x + y + z = 1 \;\rightarrow\; x = 1 - y - z$

Soluciones: $x = 1 - \lambda - \mu,\;\; y = \lambda,\;\; z = \mu$

— Si $a = 1$ y $b \neq 1$ $\rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{a = -2}$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ b \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3b + 6 = 0 \;\rightarrow\; b = -2$$

— Si $a = -2$ y $b = -2$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} -2x + \;\; y = \;\;1 - z \\ x - 2y = -2 - z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ -2 - z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 - z \\ 1 & -2 - z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z + 3}{3} = \frac{3(z + 1)}{3} = 1 + z$$

Soluciones: $x = \lambda,\;\; y = 1 + \lambda,\;\; z = \lambda$

— Si $a = -2$ y $b \neq -2$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

— Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ $\rightarrow$ $ran\ (A) \neq ran\ (A') =$ *n.° de incógnitas* $= 3$.

El sistema es *compatible determinado*.

b) $$\left.\begin{array}{r} ax + \;\; y + z = 4 \\ x + \;\; y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ -b \\ b \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = (a + 1)(a - 1) = 0 \;\; \begin{cases} a = -1 \\ a = \;\;1 \end{cases}$$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradictorias a no ser que $b = -b \rightarrow b = 0$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

— Si $a = -1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La 2.ª y 3.ª fila son iguales.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < \text{n.° de incógnitas.}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -x + y = 4 - z \\ x + y = -z \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2y = 4 - 2z \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = -z - y = -z - 2 + z = -2 \end{array}\right.$$

Soluciones: $x = -2, \; y = 2 - \lambda, \; z = \lambda$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradictorias, a no ser que $-b = 4 \rightarrow b = -4$

— Si $a = 1$ y $b \neq -4 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 1$ y $b = -4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$ La 1.ª fila y la 2.ª son iguales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < \text{n.° de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ x - y + z = -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x + y = 4 - z \\ x - y = -4 - z \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2x = -2z \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 4 - z - x = 4 - z + z = 4 \end{array}\right.$$

Soluciones: $x = -\lambda, \; y = 4, \; z = \lambda$

- **Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$** $\rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') =$ *n.° de incógnitas*

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

Página 123

AUTOEVALUACIÓN

1. a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x + ay + z} & = & \boldsymbol{a + 2} \\ \boldsymbol{x + y + az} & = & \boldsymbol{-2(a + 1)} \\ \boldsymbol{ax + y + z} & = & \boldsymbol{a} \end{array}\right.$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $$\left.\begin{array}{rcl} x + ay + z & = & a + 2 \\ x + y + az & = & -2(a + 1) \\ ax + y + z & = & a \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a + 2 \\ 1 & 1 & a & -2(a + 1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a - 1)^2(a + 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 1 \\ a = -2 \end{array}\right.$$

- **Si $a = 1$,** queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -2$,** queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

  entonces *ran* (A) = *ran* (A') = $2 <$ *n.° de incógnitas*, el sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq 1$ y a -2**: *ran* (A) = *ran* (A') = 3

  El sistema es *compatible determinado*.

b) **Para $a = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \text{ y sabemos que } |A| = 4$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$.

2. **Demuestra que no hay valores de *m* para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + z = 3} \\ \boldsymbol{x + 3y + 2z = 5} \\ \boldsymbol{x + my + 3z = 7} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \\ x + my + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{matrix}\right)$$

$|A| = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$

- **Si $m = 4$**:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hdashline 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$ La 4.ª columna se obtiene sumando la 2.ª y la 3.ª.

Luego, $ran\ (A) = ran\ (A')$. El sistema es *compatible*. (En este caso sería *compatible indeterminado*, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = ran\ (A') = 2).$$

Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 - z \\ x + 3y &= 5 - 2z \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 2 \\ 5-2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 5-2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

Soluciones: $x = -1 + \lambda$; $y = 2 - \lambda$; $z = \lambda$

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 4}$: *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{4-m}{4-m} = 1; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{0}{4-m} = 0;$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4-m} = \frac{8-2m}{4-m} = \frac{2(4-m)}{4-m} = 2$$

  Solución: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$

  Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

3. **Determina para qué valores de** $\boldsymbol{a}$ **existe la matriz inversa de** $\boldsymbol{M}$**. Calcula dicha matriz inversa para** $\boldsymbol{a = 2}$**, siendo:**

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^3 - 1 + a + a - a) = 2(-a^3 + a)$$

$$|M| = 0 \;\rightarrow\; -2(a^3 - a) = 0 \;\rightarrow\; -2a(a^2 - 1) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$

Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M| = -12$$

$M_{11} = 3$; $M_{12} = -6$; $M_{13} = 6$

$M_{21} = -5$; $M_{22} = 6$; $M_{23} = -2$

$M_{31} = 1$; $M_{32} = -6$; $M_{33} = -2$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \to (M_{ij})^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to M^{-1} = -\frac{1}{12}(M_{ij})^t$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1} X A = B$ b) $(A + X)B = I$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^{-1} X A = B$

Multiplicamos por A por la izquierda y por A^{-1} por la izquierda:

$$\underbrace{AA^{-1}}_{I} X \underbrace{AA^{-1}}_{I} = ABA^{-1} \to I X I = ABA^{-1} \to X = ABA^{-1}$$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3 + 2 = -1$

$$A_{11} = -1;\ A_{12} = 2;\ A_{21} = -1;\ A_{22} = 3 \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X)\, B = I \to AB + XB = I \to XB = I - AB$

Multiplicamos por B^{-1} por la derecha:

$$\underbrace{XBB^{-1}}_{I} = (I - AB)B^{-1} \to XI = (I - AB)B^{-1} \to X = (I - AB)B^{-1}$$

Calculamos B^{-1}: $|B| = 1 + 2 = 3$

$$B_{11} = 1;\ B_{12} = -2;\ B_{21} = 1;\ B_{22} = 1 \to (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (B_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ij})^t \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $I - AB$:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow I - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5. El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 = n.^{\circ}$ *de incógnitas* → El sistema será *compatible determinado*.
- Si $ran\ (A) = 3 \neq ran\ (A') = 4$ → El sistema será *incompatible*.

6. Discute y resuelve el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boldsymbol{x} & - & \boldsymbol{2y} & & & = & \mathbf{1} \\ & & \boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} & & & - & \boldsymbol{3z} & = & \mathbf{-1} \\ & & \boldsymbol{y} & - & \boldsymbol{z} & = & \mathbf{2} \end{array}\right.$

Según el teorema de Rouché, el sistema tendrá solución si el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como la matriz ampliada es de orden 4, buscamos los valores que anulan su determinante.

$$|A'| = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) - (1.^{a}) \\ (4.^{a}) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 - 2a - 2 + 3a - 2 - 4 = a - 14 = 0 \rightarrow a = 14$$

- **Si $a = 14$**

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 14 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*.

- **Si $a \neq 14$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = 3 \neq ran\ (A') = 4$. El sistema es *incompatible*.
- Resolución si $a = 14$:

Tomamos las ecuaciones 2.ª, 3.ª y 4.ª:

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad y + \ z = 14 \\ x \quad - 3z = -1 \\ \quad y - \ z = \ 2 \end{array} \right.$$

De la 1.ª y 3.ª ecuación obtenemos $2y = 16 \rightarrow y = 8$

$z = 14 - 8 = 6$

En la 2.ª $x = -1 + 3z = -1 + 18 = 17$

Solución: $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$

Otra forma de resolver el problema

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1.ª, 3.ª y 4.ª, obtendríamos la solución $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$.

Llevando estos valores a la 2.ª ecuación, $y + z = a \rightarrow 8 + 6 = a \rightarrow a = 14$. Este es el valor de a que hace el sistema compatible. Para cualquier otro valor de a, el sistema no tiene solución.

7. En un sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 2 incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2. Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coincide ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 =$ *n.° de incógnitas*.

El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.